Equations différentielles

M5 – Chapitre 1

I. Equations du 1er degré

1. Solution générale

$$\boxed{y' + ay = b}$$

$$\boxed{y = \underbrace{y_H}_{\substack{\text{solution}\\ \text{homogène}}} + \underbrace{y_P}_{\substack{\text{solution}\\ \text{particulière}}}}$$

2. Solution homogène

$$y_H' + ay_H = 0 \Leftrightarrow \boxed{y_H = ke^{-\int a}}$$

3. Solution particulière : méthode de la variation de la constante

On pose $y = y_0 C$ avec y_0 une des solutions homogènes et $C = C(t)$ fonction.

$$y = y_0 C \qquad y' = y_0' C + y_0 C'$$

$$\underbrace{y' + ay}_{=b} = \underbrace{(y_0' + ay_0)}_{=0} C + y_0 C'$$

$$C' = \frac{b}{y_0} \Leftrightarrow C = \int \frac{b}{y_0}\, dt \Leftrightarrow C = C_0 + k$$

$$\boxed{y = (C_0 + k) y_0 \qquad C_0 = \int \frac{b}{y_0} \qquad y_0 = e^{-\int a}}$$

II. Equations du 2nd degré

1. Solution générale

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(t)}$$

$$\boxed{y = \underbrace{y_H}_{\substack{\text{solution}\\ \text{homogène}}} + \underbrace{y_P}_{\substack{\text{solution}\\ \text{particulière}}}}$$

2. Solution homogène

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (Ec)$$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$r = \alpha \pm i\beta$	$r = -\frac{b}{2a}$	$r = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$y_H = (A\cos\beta t + B\sin\beta t)e^{at}$	$y_H = (At + B)e^{rt}$	$y_H = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

3. Solution particulière

a. Si $f(t) = P_0(t)e^{\lambda t}$

$$\boxed{y_P = Q(t)e^{\lambda t}}$$

λ pas solution de (Ec)	λ solution simple de (Ec)	λ solution double de (Ec)
$d°Q = d°P_0$	$d°Q = d°P_0 + 1$	$d°Q = d°P_0 + 2$

Puis remplacer y_P dans l'équation différentielle pour déterminer les coefficients du polynôme $Q(t)$.

b. Sinon méthode de la variation de la constante

On cherche $\boxed{y_P = Ay_1 + By_2}$ avec y_1, y_2 solutions de l'équation homogène (à identifier avec l'équation homogène précédemment calculée) et A et B fonctions. On posera également pour les calculs $\boxed{A'y_1 + B'y_2 = 0}$.

$$y_P = Ay_1 + By_2 \qquad y_P' = Ay_1' + By_2' \qquad y_P'' = A'y_1' + Ay_1'' + B'y_2' + By_2''$$

$$\underbrace{ay_P'' + by_P' + cy_P}_{=f(t)} = \mathrm{A}\underbrace{[ay_1'' + by_1' + cy_1]}_{=0} + B\underbrace{[ay_2'' + by_2' + cy_2]}_{=0} + A'y_1' + B'y_2'$$

$$\underline{A'y_1' + B'y_2' = f(t) \ \text{ et } \ A'y_1 + B'y_2 = 0}$$

$$A' = -B'y_2\frac{y_1'}{y_1} \Rightarrow -B'y_2\frac{y_1'}{y_1} + B'y_2' = f(t)$$

$$B'\left[y_2' - y_2\frac{y_1'}{y_1}\right] = f(t)$$

On calcule B', B puis A avec $A' = -B'y_2\frac{y_1'}{y_1}$